שלבי חקירת פונקציה רציונלית:

דוגמא: נתונה הפונקציה $y=\dfrac{x^2}{x^2-4x+3}$ בצע חקירה מלאה.

תחום הגדרה: כדי למצוא תחום הגדרה משווים את המכנה ל-0 ומגלים מתי הפונקציה לא מוגדרת.

א. תחום הגדרה: אסור שהמכנה של השבר יתאפס:

$$x^2-4x+3\neq 0$$
$$(x-3)(x-1)\neq 0 \to \quad x_1\neq 3\ ,\ \ x_2\neq 1$$

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x\neq 3\ ,\ \ x\neq 1$.

חיתוך עם הצירים:
מציבים x=0 ומגלים את החיתוך עם ציר ה-y
מציבים y=0 ומגלים את החיתוך עם ציר ה-x

ב. חיתוך עם הצירים: חיתוך עם ציר ה-x: נציב $y=0$ ונפתור

$$\tfrac{x^2}{x^2-4x+3}=0 \to x^2=0 \to x=0 \quad \to \quad (0,0)$$

חיתוך עם ציר ה-y: נציב $x=0$ ונפתור

$$y=\tfrac{0}{0-0+3}=0 \quad \to \quad (0,0)$$

אסימפטוטות אנכיות: קיימות בנקודות אי הגדרה שנמצאו ב-א' בתנאי שהן לא מאפסות את המונה (אם הן מאפסות יש בגרף **חור** ולא אסימפטוטה).
אסימפטוטות אופקיות: במידה והחזקה הגבוהה ביותר במונה **שווה** לחזקה הגבוהה ביותר במכנה מחלקים את מקדמי החזקות הנ"ל והתוצאה היא האסימפטוטה האופקית.
במידה והחזקה המקסימלית במונה **קטנה** משל המכנה יש אסימפטוטה אופקית y=0.
במידה והחזקה המקסימלית במונה **גדולה** משל המכנה אין אסימפטוטה אופקית.

ג. אסימפטוטות:
אסימפטוטה אנכית: היות ושתי נקודות אי ההגדרה שמצאנו ב-א' לא מאפסות את המונה, לכן תהיינה בהן אסימפטוטות אנכיות : $x_1=3 \quad , \quad x_2=1$
אסימפטוטה אופקית: החזקה המקסימלית במונה ובמכנה שווה, לכן נחלק את מקדם המונה, (במקרה שלנו שווה 1), בזה של המכנה (גם הוא שווה 1) ונקבל את האסימפטוטה :

$$y=\frac{1}{1}\to y=1$$

צורת הכתיבה המקובלת היא:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-4x+3}=1\to y=1$$

נקודות קיצון: גוזרים את הפונקציה ונשווה ל-0 נבדוק מתי המונה מתאפס והתוצאה שנקבל היא נקודה החשודה כקיצון. אח"כ נגלה על ידי הצבה בפונקציה המקורית למה שווה ה-Y של הנקודות.
סיווג הנקודות ותחומי עלייה וירידה: נגלה באמצעות טבלה כאשר בין העמודות אנו כותבים את ה-X-ים בהם הפונקציה לא מוגדרת ואת ה-X-ים של הנקודות החשודות. הנקודות יופיעו בסדר עולה.
בודקים את ערך הנגזרת "מימין" ו"משמאל" לכל נקודה וכך יודעים עם הפונקציה עולה או יורדת בכל תחום (כשהנגזרת שלילית הפונקציה יורדת וכשחיובית היא עולה).
בנוסף לנקודות קיצון שהתגלו בעזרת הנגזרת ישנן נקודות קיצון מקומיות בקצוות הגרף במידה והפונקציה מוגדרת בתחום סגור.
במקרה זה פשוט בודקים האם בסביבת הקצה הנקודה היא מינימום מקומי, או שהיא מקסימום מקומי.

ד. נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה:
שלב מקדים: נגזור נסדר ונשווה ל-0:

$$y'=\tfrac{2x\cdot(x^2-4x+3)-x^2\cdot(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}\to y'=\tfrac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2}=0$$

$$-4x^2-6x=0\to x\cdot(-4x+6)=0\to \qquad x_1=0, x_2=1.5$$

כעת נבנה את טבלת הקיצון ונציב בה את הנקודות החשודות: **(שימו לב שמכניסים לטבלה גם את הנקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת)**

x	-1	0	1/2	1	1.2	1.5	2	3	4
F'(x)	-		+		+		-		-
משמעות	↘	Min	↗	אי הגדרה	↗	Max	↘	אי הגדרה	↘

נבדוק את שיעורי ה-y של הנקודות שהתגלו כקיצון (באמצעות הצבת ה-x בפונקציה המקורית).

$$y_{(1.5)}=\tfrac{1.5^2}{1.5^2-4\cdot1.5+3}=0\to y=-3 \qquad y_{(0)}=\tfrac{0^2}{0^2-4\cdot0+3}=0\to y=0$$

קיבלנו את התוצאות הבאות: $(0,0)$ נקודת מינימום, $(1.5,-3)$ נקודת מקסימום.(אין קצוות)
תחומי עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחומים: $x<0\ ,\ \ 1.5<x<3\ \ ,3<x$
הפונקציה עולה בתחומים : $0<x<1\ ,\ 1<x<1.5$

הסבר לרמת 5 יחידות בלבד (ללא דוגמא)- מציאת נקודות פיתול שלא נתגלו בטבלה הראשונה: נחשב הנגזרת השנייה של הפונקציה ונבדוק מתי מתאפסת, התוצאה שנקבל היא נקודה החשודה כפיתול. אח"כ נגלה על ידי הצבה בפונקציה המקורית למה שווה ה-Y של הנקודות.
סיווג הנקודות ותחומי קעירות מעלה ומטה: נגלה באמצעות טבלה כאשר בין העמודות אנו כותבים את ה-X-ים בהם הפונקציה לא מוגדרת ואת ה-X-ים של הנקודות החשודות כנקודות פיתול. הנקודות יופיעו בסדר עולה.
בודקים את ערך הנגזרת **השנייה** "מימין" ו"משמאל" לכל נקודה וכך יודעים עם הפונקציה קעורה מעלה או מטה בכל תחום (כשהנגזרת השנייה שלילית הפונקציה קעורה מטה וכשחיובית היא קעורה מעלה).

שרטוט גרף: ראשית מסמנים את האסימפטוטות בקו מקווקו. לאחר מכן מסמנים את נקודות הקיצון ואת נקודות החיתוך עם הצירים ולבסוף משרטטים על פי הטבלה.

לא לשכוח לשרטט את חלקי הגרף מימין ומשמאל לאסימפטוטות גם כשאין באזור זה נקודות קיצון.